THALES KREIS MÜNCHEN

Materialien für Unterricht und Studium

Prüfungsfragen zur Elektrodynamik

von Georg Bernhardt*

17. Juni 2018

Diese Zusammenstellung von Fragen und Antworten zur Elektrodynamik entstand während meiner Vorbereitung auf die Diplomprüfung in Theoretischer Physik an der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg. Ich bedanke mich bei der Fachschaft MathPhysInfo in Heidelberg für die Bereitstellung von Prüfungsberichten, die als Grundlage für diesen Fragenkatalog dienten.

Diesen Text können Sie als PDF-Datei herunterladen unter:
www.thaleskreis.de/materialien/elektrodynamik.pdf

*Dipl.-Phys. Georg Bernhardt · E-Mail: georg.bernhardt@thaleskreis.de

Inhaltsverzeichnis

1. Womit beschäftigt sich die Elektrodynamik?

Die Elektrodynamik ist eine klassische, relativistische Feldtheorie, die sich mit den elektrischen und magnetischen Phänomenen beschäftigt. Aus den Maxwellgleichungen, die zusammen mit der Lorentzkraft die Grundgleichungen der Elektrodynamik bilden, lassen sich alle klassischen elektromagnetischen Effekte herleiten. Die Erweiterung der Elektrodynamik zu einer Quantenfeldtheorie ist in der Quantenelektrodynamik (QED) realisiert.

Das Wort Elektrodynamik setzt sich aus den griechischen Wörtern für Bernstein, ἤλεκτρον, und Kraft, δύναμις, zusammen.

2. Wie lauten die Grundgleichungen der Elektrodynamik?

Die Maxwellgleichungen bilden zusammen mit der Lorentzkraft die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Die Lorentzkraft lautet[1]

$$\vec{F}_{\mathrm{L}} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right). \tag{2.1}$$

Für die Maxwellgleichungen gibt es verschiedene, zueinander äquivalente, Darstellungen. Im Folgenden wird die differentielle und die kovariante Formulierung genannt. Eine weitere Darstellung ist die Integralform, die man mit Hilfe der Sätze von Gauß und Stokes aus den differentiellen Maxwellgleichungen gewinnen kann.

Die differentiellen Maxwellgleichungen lauten

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0\,, \tag{2.2}$$
$$\operatorname{rot}\vec{E} + \tfrac{1}{c}\,\partial_t\vec{B} = 0\,, \tag{2.3}$$
$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\varrho\,, \tag{2.4}$$
$$\operatorname{rot}\vec{B} - \tfrac{1}{c}\,\partial_t\vec{E} = \tfrac{4\pi}{c}\,\vec{\jmath}, \tag{2.5}$$

mit dem elektrischen Feld $\vec{E}$, dem magnetischen Induktionsfeld $\vec{B}$, der elektrischen Ladungsdichte ϱ, der elektrischen Stromdichte $\vec{\jmath}$ und der Vakuumlichtgeschwindigkeit c. Die Gleichungen (2.2) und (2.3) bezeichnet man als homogene Maxwellgleichungen, weil sie keine Ladungen und Ströme enthalten; (2.4) und (2.5) nennt man entsprechend inhomogene Maxwellgleichungen.

Die kovarianten Maxwellgleichungen lauten

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0\,, \tag{2.6}$$
$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \tfrac{4\pi}{c}\,j^\beta\,, \tag{2.7}$$

mit den Vierervektoren $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha = \left(\tfrac{1}{c}\,\partial_t\,,\ \nabla\right)$, $\partial^\alpha = \partial/\partial x_\alpha = \left(\tfrac{1}{c}\,\partial_t\,,\ -\nabla\right)$,

[1]Hier wird das Einheitensystem nach Gauß verwendet, in dem E und B die gleiche physikalische Einheit haben.

$j^\beta = \left(c\varrho\,,\,\vec{\jmath}\right)$ und dem elektromagnetischen Feldstärketensor

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

[Die homogene Maxwellgleichung (2.6) kann durch die Matrix

$$G^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

auch in der kompakteren Form $\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = 0$ ausgedrückt werden. Dies ist aber keine kovariante Darstellung der homogenen Maxwellgleichung, da $G^{\alpha\beta}$ kein Tensor, sondern ein Pseudotensor ist.]

3. Wie ist das elektrische Feld definiert?

Das elektrische Feld ist über die Kraft definiert, die es auf eine Testladung ausübt:

$$\vec{E} = \lim_{q\to 0} \frac{\vec{F}}{q}\,. \tag{3.1}$$

Mit dem Grenzübergang $q \to 0$ ist gemeint, dass der Einfluss der Testladung auf das $\vec{E}$-Feld vernachlässigbar sein soll.

4. Wie ist das magnetische Induktionsfeld definiert?

Als Definition des magnetischen Induktionsfeldes kann man das Biot-Savart-Gesetz der Magnetostatik heranziehen: Das magnetische Induktionsfeld $\vec{B}$ einer beliebigen stationären Stromdichte $\vec{\jmath}(\vec{r}\,)$ lautet

$$\vec{B}(\vec{r}\,) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r'\,\vec{\jmath}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,. \tag{4.1}$$

5. Wie lauten die Integralsätze von Gauß und Stokes?

Gauß: $$\int_V \mathrm{d}^3r\,\mathrm{div}\,\vec{E} = \oint_F \mathrm{d}\vec{f}\,\vec{E}\,, \qquad \text{mit } F = \text{Oberfläche von V.} \tag{5.1}$$

Stokes: $$\int_F \mathrm{d}\vec{f}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} = \oint_C \mathrm{d}\vec{r}\,\vec{B}\,, \qquad \text{mit } C = \text{Rand von F.} \tag{5.2}$$

6. Welche Bedeutung haben die Maxwellgleichungen?

Die Maxwellgleichungen enthalten die folgenden physikalischen Gesetze:

- **Abwesenheit Magnetischer Monopole:**

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad \xrightarrow{\text{Gauß}} \quad \oint \mathrm{d}\vec{f}\,\vec{B} = 0 \tag{6.1}$$

  Der Magnetische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ist Null; Magnetfeldlinien sind geschlossene Kurven.

- **Faraday'sches Induktionsgesetz:**

$$\operatorname{rot}\vec{E} + \tfrac{1}{c}\,\partial_t\vec{B} = 0 \quad \xrightarrow{\text{Stokes}} \quad U = -\tfrac{1}{c}\,\partial_t\Phi_B \tag{6.2}$$

  Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses $\Phi_B = \int \mathrm{d}\vec{f}\,\vec{B}$ durch die Fläche $\vec{F}$ (Änderung von $\vec{B}$ oder $\vec{F}$) induziert eine Spannung $U = \oint \mathrm{d}\vec{r}\,\vec{E}$, also einen elektrischen Strom, der seiner Ursache entgegenwirkt (Lenz'sche Regel).

- **Gauß'sches Gesetz:**

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\varrho \quad \xrightarrow{\text{Gauß}} \quad \oint \mathrm{d}\vec{f}\,\vec{E} = 4\pi Q \tag{6.3}$$

  Der gesamte elektrische Fluss durch die Oberfläche eines Volumens V ist proportional zu der in V enthaltenen Ladung $Q = \int \mathrm{d}V\varrho$.

- **Ampère'sches Gesetz und Maxwell'scher Verschiebungsstrom:**

$$\operatorname{rot}\vec{B} - \tfrac{1}{c}\,\partial_t\vec{E} = \tfrac{4\pi}{c}\,\vec{\jmath} \quad \xrightarrow{\text{Stokes}} \quad \oint \mathrm{d}\vec{r}\,\vec{B} = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}\vec{f}\,\partial_t\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\,I \tag{6.4}$$

  Bei zeitlich konstantem $\vec{E}$-Feld gilt

$$\oint \mathrm{d}\vec{r}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\,I\,. \tag{6.5}$$

  Ein konstanter elektrischer Strom $I = \int \mathrm{d}\vec{f}\,\vec{\jmath}$ induziert ein magnetisches Feld, dessen (geschlossene) Feldlinien um den Strom zirkulieren.

  Der Term $-\frac{1}{c}\,\partial_t\vec{E}$ ist der so genannte Maxwell'sche Verschiebungsstrom; ohne ihn stünden die Maxwellgleichungen im Widerspruch zur Kontinuitätsgleichung.

7. Woran sieht man, dass die Elektrodynamik eine vereinheitlichte Feldtheorie ist?

An der kovarianten Formulierung der Maxwellgleichungen (2.6)–(2.7): Darin wird das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Induktionsfeld $\vec{B}$ zu einer einzigen physikalischen Größe zusammengeführt – dem elektromagnetischen Feldstärketensor $F^{\alpha\beta}$. In dieser Tensorgröße manifestiert sich die Vereinigung von Elektrizität und Magnetismus zum elektromagnetischen Feld.

8. Wie kommt man auf den Feldstärketensor?

Aus den homogenen Maxwellgleichungen $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ und $\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\,\partial_t\vec{B} = 0$ kann man folgern, dass sich das elektromagnetische Feld durch die Potentiale $\vec{A}$ und ϕ ausdrücken lässt, denn für jedes Vektorfeld $\vec{A}$ und Skalarfeld ϕ gilt die Beziehung $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A}) = 0$ bzw. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\phi) = 0$, und die homogenen Maxwellgleichungen sind automatisch erfüllt, wenn man den Zusammenhang zwischen elektromagnetischen Feldern und Potentialen als

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \tfrac{1}{c}\,\partial_t\vec{A}\,, \qquad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \tag{8.1}$$

ansetzt. Wenn man die Komponenten ausschreibt, ergibt sich

$$\begin{aligned} E_x &= -\partial_x\phi - \tfrac{1}{c}\,\partial_t A_x\,, & B_x &= \partial_y A_z - \partial_z A_y\,,\\ E_y &= -\partial_y\phi - \tfrac{1}{c}\,\partial_t A_y\,, & B_y &= \partial_z A_x - \partial_x A_z\,,\\ E_z &= -\partial_z\phi - \tfrac{1}{c}\,\partial_t A_z\,, & B_z &= \partial_x A_y - \partial_y A_x\,. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Mit den Vierervektoren $\partial^\alpha = \left(\frac{1}{c}\,\partial_t\,, -\nabla\right)$ und $A^\alpha = \left(\phi\,, \vec{A}\right)$ wird dies zu

$$\begin{aligned} E_x &= \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1\,, & B_x &= \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3\,,\\ E_y &= \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2\,, & B_y &= \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1\,,\\ E_z &= \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3\,, & B_z &= \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2\,. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Daraus kann man einen antisymmetrischen Tensor 2. Stufe konstruieren, den so genannten Feldstärketensor

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z\\ E_x & 0 & -B_z & B_y\\ E_y & B_z & 0 & -B_x\\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Die kovarianten Komponenten des Feldstärketensors ergeben sich mit der Minkowski-Metrik zu $F_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}F^{\alpha\beta}$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z\\ E_x & 0 & -B_z & B_y\\ E_y & B_z & 0 & -B_x\\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\curvearrowright \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z\\ -E_x & 0 & -B_z & B_y\\ -E_y & B_z & 0 & -B_x\\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.5}$$

9. Sind Ladungs- und Stromdichte beliebig?

Nein, sie erfüllen die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0 \qquad \rightleftharpoons \qquad \partial_t\varrho + \operatorname{div}\vec{\jmath} = 0\,. \tag{9.1}$$

10. Wie kann man die Kontinuitätsgleichung aus den Maxwellgleichungen herleiten?

Die Kontinuitätsgleichung ergibt sich aus der Ableitung ∂_β der inhomogenen Maxwellgleichung $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}\, j^\beta$ und Summation über β:

$$\partial_\beta \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \tfrac{4\pi}{c}\, \partial_\beta j^\beta = \tfrac{4\pi}{c} \Big(\partial_t \varrho + \operatorname{div} \vec{j} \Big) . \tag{10.1}$$

Auf der linken Seite kann man die Vertauschbarkeit der Ableitungen $\partial_\alpha \partial_\beta = \partial_\beta \partial_\alpha$ und die Antisymmetrie des Feldstärketensors $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$ ausnutzen:

$$\partial_\beta \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\partial_\alpha \partial_\beta F^{\beta\alpha} = -\partial_\beta \partial_\alpha F^{\alpha\beta} , \tag{10.2}$$

wobei im letzten Schritt die Indizes $\alpha \leftrightarrow \beta$ umbenannt wurden. Daraus folgt $\partial_\beta \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0$. Aus (10.1) ergibt sich dann die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div} \vec{j} = 0 . \tag{10.3}$$

11. Wie transformieren sich $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bei einem Wechsel des Bezugssystems?

Das Transformationsverhalten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ beim Wechsel zwischen Inertialsystemen ergibt sich aus einer Lorentztransformation des Feldstärketensors:

$$F^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha'}_{\alpha}\, \Lambda^{\beta'}_{\beta}\, F^{\alpha\beta} . \tag{11.1}$$

Im Falle einer Relativgeschwindigkeit $v = \beta c$ in x-Richtung erhält man:

$$\begin{aligned} F^{\alpha'\beta'} &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -\gamma(E_y - \beta B_z) & -\gamma(E_z + \beta B_y) \\ E_x & 0 & -\gamma(B_z - \beta E_y) & \gamma(B_y + \beta E_z) \\ \gamma(E_y - \beta B_z) & \gamma(B_z - \beta E_y) & 0 & -B_x \\ \gamma(E_z + \beta B_y) & -\gamma(B_y + \beta E_z) & B_x & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{11.2}$$

Für den Vektor des elektrischen Feldes und den Pseudovektor des magnetischen Induktionsfeldes gilt demnach

$$\begin{aligned} \vec{E}'_\parallel &= \vec{E}_\parallel , & \vec{E}'_\perp &= \gamma\Big(\vec{E}_\perp + \vec{\beta} \times \vec{B}\Big) , \\ \vec{B}'_\parallel &= \vec{B}_\parallel , & \vec{B}'_\perp &= \gamma\Big(\vec{B}_\perp - \vec{\beta} \times \vec{E}\Big) , \end{aligned} \tag{11.3}$$

wobei $\parallel$ und $\perp$ die zu $\vec{\beta}$ parallelen bzw. senkrechten Komponenten der Felder bezeichnen.

12. Wie kann man das $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld einer gleichförmig bewegten Ladung herleiten?

Aus einer Lorentztransformation des Feldstärketensors vom Ruhesystem der Ladung, wo $\vec{B}\,' = 0$ und $\vec{E}\,'(\vec{r}\,') = q\vec{r}\,'/\,|\vec{r}\,'|^3$ (statisches Coulombfeld) gilt, ins Laborsystem, in welchem sich die Ladung mit der Geschwindigkeit $v = \beta c$ entlang der x-Achse bewegt. Im Ruhesystem der Ladung lautet der Feldstärketensor

$$F^{\alpha'\beta'}(\vec{r}\,') = \frac{q}{|\vec{r}\,'|^3}\begin{pmatrix} 0 & -x' & -y' & -z' \\ x' & 0 & 0 & 0 \\ y' & 0 & 0 & 0 \\ z' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12.1}$$

Eine Transformation ins Laborsystem

$$F^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\ \alpha'}\,\Lambda^{\beta}_{\ \beta'}\,F^{\alpha'\beta'} \quad \text{mit} \quad \Lambda^{\alpha}_{\ \alpha'} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12.2}$$

liefert

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta}(\vec{r}\,') &= \begin{pmatrix} 0 & -E'_x & -\gamma E'_y & -\gamma E'_z \\ E'_x & 0 & -\gamma\beta E'_y & -\gamma\beta E'_z \\ \gamma E'_y & \gamma\beta E'_y & 0 & 0 \\ \gamma E'_z & \gamma\beta E'_z & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{q}{|\vec{r}\,'|^3}\begin{pmatrix} 0 & -x' & -\gamma y' & -\gamma z' \\ x' & 0 & -\gamma\beta y' & -\gamma\beta z' \\ \gamma y' & \gamma\beta y' & 0 & 0 \\ \gamma z' & \gamma\beta z' & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{12.3}$$

Wenn man $\vec{r}\,'$ durch $\vec{r}$ ausdrückt, d.h. die Lorentztransformation $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$, $z' = z$ anwendet, erhält man

$$F^{\alpha\beta}(\vec{r}, t) = \frac{\gamma q}{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}\begin{pmatrix} 0 & -x + vt & -y & -z \\ x - vt & 0 & -\beta y & -\beta z \\ y & \beta y & 0 & 0 \\ z & \beta z & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12.4}$$

Die $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder der bewegten Ladung lauten demnach

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\gamma q}{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}\begin{pmatrix} x - vt \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{12.5}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\gamma\beta q}{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}. \tag{12.6}$$

13. Wie lauten die Maxwellgleichungen in Materie?

In Materie bleibt die homogene Maxwellgleichung unverändert,

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0\,, \tag{13.1}$$

und die inhomogene Gleichung wird zu

$$\partial_\alpha \widetilde{F}^{\alpha\beta} = \tfrac{4\pi}{c}\, j^\beta\,, \tag{13.2}$$

wobei $\widetilde{F}^{\alpha\beta}$ aus dem Feldstärketensor $F^{\alpha\beta}$ durch die Substitutionen $\vec{E} \to \vec{D}$ und $\vec{B} \to \vec{H}$ hervorgeht,

$$\widetilde{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.3}$$

$\vec{D}$ nennt man das elektrische Verschiebungsfeld und $\vec{H}$ das Magnetfeld. Durch die Größen $\vec{D}$ und $\vec{H}$ kommt der Einfluss der elektromagnetischen Felder auf Materie zum Ausdruck, nämlich Polarisation und Magnetisierung. Man definiert

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{E} + 4\pi\vec{P}\,, \\ \vec{H} &= \vec{B} - 4\pi\vec{M}\,, \end{aligned} \tag{13.4}$$

wobei $\vec{P}$ die elektrische Dipoldichte (= Polarisation) und $\vec{M}$ die magnetische Dipoldichte (= Magnetisierung) ist.

Der Zusammenhang zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$ bzw. $\vec{H}$ und $\vec{B}$ hängt von den elektrischen und magnetischen Eigenschaften des betrachteten Mediums ab. Bei nicht zu hohen Feldstärken gilt für viele Materialien ein linearer Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \chi_\mathrm{e}\vec{E}\,, \\ \vec{M} &= \chi_\mathrm{m}\vec{H}\,, \end{aligned} \tag{13.5}$$

mit der elektrischen bzw. magnetischen Suszeptibilität χ_e bzw. χ_m des betrachteten Mediums, und damit

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon\vec{E}\,, & \varepsilon &= 1 + 4\pi\chi_\mathrm{e}\,, \\ \vec{B} &= \mu\vec{H}\,, & \mu &= 1 + 4\pi\chi_\mathrm{m}\,. \end{aligned} \tag{13.6}$$

Bei den Größen χ_e, χ_m, ε und μ handelt es sich im Allgemeinen um Tensoren 2. Stufe – sie können demnach durch 3×3-Matrizen dargestellt werden. Bei isotropen Medien vereinfachen sie sich zu Skalaren. Sie sind konstant, wenn man homogene Medien betrachtet, und ortsabhängig bei inhomogenen Medien.

Medium	$\boldsymbol{\chi_\mathrm{e}}$, $\boldsymbol{\chi_\mathrm{m}}$ **bzw.** $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\mu}$
homogen	konstant
inhomogen	ortsabhängig
isotrop	Skalare
anisotrop	Tensoren 2. Stufe (3×3-Matrizen)

14. Was ist eine Eichtransformation?

Aus den homogenen Maxwellgleichungen $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ und $\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\,\partial_t\vec{B} = 0$ kann man folgern, dass sich das elektromagnetische Feld durch Potentiale ausdrücken lässt, da jedes Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r},t)$ und jedes Skalarfeld $\phi(\vec{r},t)$ die Beziehung

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\phi) = 0 \tag{14.1}$$

erfüllt. Zwischen den elektromagnetischen Feldern und den Potentialen besteht der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \operatorname{rot}\vec{A}\,, \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad}\phi - \tfrac{1}{c}\,\partial_t\vec{A}\,. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Die elektromagnetischen Potentiale sind jedoch nicht eindeutig festgelegt, denn $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ändern sich nicht, wenn man die Transformation

$$\begin{aligned} \vec{A} &\to \vec{A} + \operatorname{grad}\chi\,, \\ \phi &\to \phi - \tfrac{1}{c}\,\partial_t\chi \end{aligned} \tag{14.3}$$

durchführt, wobei $\chi(\vec{r},t)$ ein beliebiges Skalarfeld ist.

Eine solche Änderung der Potentiale, die die elektromagnetischen Felder – und damit auch die Maxwellgleichungen – unverändert lässt, nennt man Eichtransformation.

15. Wie lautet die Coulomb-Eichung?

$$\nabla\vec{A} = 0 \tag{15.1}$$

16. Wie lautet die Lorenz-Eichung?

$$\partial_\alpha A^\alpha = \tfrac{1}{c}\,\partial_t\phi + \nabla\vec{A} = 0 \tag{16.1}$$

17. Welche Rolle spielen die elektromagnetischen Potentiale in der Elektrodynamik und der Quantenmechanik?

In der Elektrodynamik haben die elektromagnetischen Potentiale vor allem praktischen Nutzen: Mit ihrer Hilfe lassen sich die inhomogenen Maxwellgleichungen entkoppeln und allgemein lösen. Aufgrund ihrer Eichfreiheit werden sie aber häufig nur als mathematische Hilfsgrößen betrachtet, während die elektromagnetischen Felder als die fundamentalen Größen der Elektrodynamik gelten.

In der Quantenmechanik sind die Rollen jedoch vertauscht. Der Aharonov-Bohm-Effekt zeigt, dass es Situationen gibt, in denen die elektromagnetischen Potentiale als die fundamentalen Größen angesehen werden müssen.

18. Unter welchen Transformationen sind die Maxwellgleichungen ko- bzw. invariant?

Die Maxwellgleichungen sind kovariant (= forminvariant) unter räumlichen Koordinatentransformationen (Translationen, Drehungen und Spiegelungen im Raum), unter raumzeitlichen Koordinatentransformationen (Lorentztransformationen, also dem Wechsel zwischen verschieden bewegten Inertialsystemen), unter Zeitumkehr und unter Ladungskonjugation. Ferner sind sie invariant unter Eichtransformationen der Potentiale.

Um die Kovarianz der Maxwellgleichungen bezüglich einer Koordinatentransformation $x^\alpha \to x^{\alpha'}$ zu zeigen, geht man von der inhomogenen Maxwellgleichung in kovarianter Form, $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}\, j^\beta$, aus. Multiplikation mit $\partial x^{\beta'}/\partial x^\beta$ und Summation über β liefert

$$\partial_\alpha \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} j^\beta \qquad \curvearrowright \qquad \partial_\alpha F^{\alpha\beta'} = \tfrac{4\pi}{c}\, j^{\beta'} . \tag{18.1}$$

Die Ableitung ∂_α kann man umschreiben als[2]

$$\partial_\alpha = \partial_\mu\, \delta^\mu_\alpha = \partial_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} \tag{18.4}$$

und oben einsetzen:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta'} = \partial_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} F^{\alpha\beta'} = \partial_{\nu'} F^{\nu'\beta'} = \tfrac{4\pi}{c}\, j^{\beta'} . \tag{18.5}$$

Umbenennen des Summationsindex $\nu' \to \alpha'$ ergibt schließlich:

$$\partial_{\alpha'} F^{\alpha'\beta'} = \tfrac{4\pi}{c}\, j^{\beta'} . \tag{18.6}$$

Die inhomogene Maxwellgleichung hat im gestrichenen Koordinatensystem somit die gleiche Form wie im ungestrichenen; sie ist forminvariant gegenüber Koordinatentransformationen. Für die homogene Maxwellgleichung kann dies analog gezeigt werden.

[2] Das kann man folgendermaßen sehen. Man betrachte einen Vierervektor v^a. Sein Transformationsverhalten bezüglich einer Koordinatentransformation $x^a \to x^{a'}$, bzw. Rücktransformation $x^{a'} \to x^a$ lautet

$$v^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^{b'}}\, v^{b'} , \qquad v^{b'} = \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^c}\, v^c . \tag{18.2}$$

Ineinander eingesetzt ergibt das

$$v^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^{b'}} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^c}\, v^c \qquad \curvearrowright \qquad \frac{\partial x^a}{\partial x^{b'}} \frac{\partial x^{b'}}{\partial x^c} = \delta^a_c . \tag{18.3}$$

Die Kovarianz der Maxwellgleichungen unter Zeitumkehr sieht man am Verhalten der darin vorkommenden Größen:[3]

$$\partial_\alpha = \Big(\tfrac{1}{c}\,\partial_t\,,\nabla\Big) \qquad \to \qquad \widetilde{\partial}_\alpha = \Big(-\tfrac{1}{c}\,\partial_t\,,\nabla\Big) = -\partial^\alpha\,, \tag{18.7}$$

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \widetilde{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = -F_{\alpha\beta}, \tag{18.8}$$

$$j^\beta = \Big(c\varrho\,,\vec{\jmath}\Big) \qquad \to \qquad \widetilde{\jmath}^\beta = \Big(c\varrho\,,-\vec{\jmath}\Big) = j_\beta\,. \tag{18.9}$$

Die Maxwellgleichungen kann man nun entsprechend umschreiben:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \tfrac{4\pi}{c}\, j^\beta \quad &\curvearrowright \quad \partial^\alpha F_{\alpha\beta} = \tfrac{4\pi}{c}\, j_\beta \\ &\curvearrowright \quad -\partial^\alpha(-F_{\alpha\beta}) = \tfrac{4\pi}{c}\, j_\beta \\ &\curvearrowright \quad \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{F}^{\alpha\beta} = \tfrac{4\pi}{c}\, \widetilde{\jmath}^\beta\,. \end{aligned} \tag{18.10}$$

Für die homogene Maxwellgleichung geht das analog.

Bei Ladungskonjugation gilt $\widetilde{\partial}_\alpha = \partial_\alpha$, $\widetilde{F}^{\alpha\beta} = -F^{\alpha\beta}$ und $\widetilde{\jmath}^\beta = -j^\beta$ und damit:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \tfrac{4\pi}{c}\, j^\beta \quad &\curvearrowright \quad \partial_\alpha\Big(-F^{\alpha\beta}\Big) = \tfrac{4\pi}{c}\Big(-j^\beta\Big) \\ &\curvearrowright \quad \widetilde{\partial}_\alpha \widetilde{F}^{\alpha\beta} = \tfrac{4\pi}{c}\, \widetilde{\jmath}^\beta\,. \end{aligned} \tag{18.11}$$

Die Invarianz der Maxwellgleichungen bezüglich Eichtransformation der Potentiale kann man wie folgt nachrechnen. Die Eichtransformation des Viererpotentials A^α lautet

$$\widetilde{A}^\alpha = A^\alpha - \partial^\alpha \chi\,. \tag{18.12}$$

Der Zusammenhang zwischen dem elektromagnetischen Feld und dem Viererpotential kommt durch die Gleichung

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \tag{18.13}$$

zum Ausdruck. Eine Eichtransformation des Viererpotentials ergibt

$$\begin{aligned} \widetilde{F}^{\alpha\beta} &\equiv \partial^\alpha \widetilde{A}^\beta - \partial^\beta \widetilde{A}^\alpha \\ &= \partial^\alpha(A^\beta - \partial^\beta\chi) - \partial^\beta(A^\alpha - \partial^\alpha\chi) \\ &= \partial^\alpha A^\beta - \partial^\alpha\partial^\beta\chi - \partial^\beta A^\alpha + \partial^\alpha\partial^\beta\chi \\ &= \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha = F^{\alpha\beta}\,. \end{aligned} \tag{18.14}$$

[3]Bei der Zeitumkehr erhalten alle physikalischen Größen, die die Zeit in ungerader Potenz enthalten – z.B. t, ∂_t, $\vec{v}$, $\vec{p}$, $\vec{\jmath}$, etc. – ein Minuszeichen. Aus der Definition von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ – Gleichung (3.1) und (4.1) – folgt dann, dass $\vec{E}$ invariant bei Zeitumkehr ist, aber $\vec{B}$ ein Minuszeichen bekommt.

19. Wie lautet die allgemeine Lösung der Maxwellgleichungen?

Zur allgemeinen Lösung der Maxwellgleichungen kommt man über die elektromagnetischen Potentiale ϕ und $\vec{A}$. Man definiert die Potentiale so, dass sie die homogenen Maxwellgleichungen automatisch erfüllen; in Vierervektorschreibweise lautet dies

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha \,, \tag{19.1}$$

mit den Vierervektoren $\partial^\alpha = \left(\frac{1}{c}\,\partial_t \,,\, -\nabla\right)$, $A^\beta = \left(\phi \,,\, \vec{A}\right)$ und dem Feldstärketensor $F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$.

Die Potentiale sind nicht eindeutig festgelegt, denn die $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder ändern sich nicht, wenn man eine so genannte Eichtransformation des Viererpotentials

$$A^\alpha \;\to\; A^\alpha - \partial^\alpha \chi \tag{19.2}$$

durchführt, wobei $\chi(\vec{r}, t)$ ein beliebiges Skalarfeld ist.

Wenn man in den inhomogenen Maxwellgleichungen $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}\, j^\beta$ den Feldstärketensor durch die Potentiale ausdrückt, erhält man[4]

$$\Box A^\alpha - \partial^\alpha \partial_\beta A^\beta = \tfrac{4\pi}{c}\, j^\alpha \,. \tag{19.3}$$

Die Eichfreiheit kann nun dazu ausgenutzt werden, diese Gleichung zu vereinfachen. In der Lorenz-Eichung $\partial_\beta A^\beta = 0$ ergibt sich

$$\Box A^\alpha = \tfrac{4\pi}{c}\, j^\alpha \,. \tag{19.4}$$

Die Lösung dieser inhomogenen Wellengleichung lautet

$$A^\alpha(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{j^\alpha(\vec{r}\,', \, t \pm |\vec{r} - \vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \,. \tag{19.5}$$

Je nach Vorzeichen spricht man vom retardierten bzw. avancierten Viererpotential

$$A^\alpha_{\mathrm{ret}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{j^\alpha(\vec{r}\,', t_{\mathrm{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \,, \tag{19.6}$$

$$A^\alpha_{\mathrm{av}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{j^\alpha(\vec{r}\,', t_{\mathrm{av}})}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \,, \tag{19.7}$$

mit der retardierten bzw. avancierten Zeit

$$t_{\mathrm{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c} \,, \tag{19.8}$$

$$t_{\mathrm{av}} = t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c} \,. \tag{19.9}$$

[4] $\Box$ ist der d'Alembert-Operator, $\Box = \partial_\alpha \partial^\alpha = \dfrac{1}{c^2}\,\partial_t^2 - \nabla^2$.

20. Wie lautet das Biot-Savart-Gesetz? Wie kommt man darauf?

Das Biot-Savart-Gesetz gibt das magnetische Induktionsfeld $\vec{B}$ einer beliebigen stationären Stromdichte $\vec{\jmath}(\vec{r})$ wider,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \, \vec{\jmath}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \,. \tag{20.1}$$

Zur Herleitung des Biot-Savart-Gesetzes betrachtet man die allgemeine Lösung der Maxwellgleichungen (19.5) im magnetostatischen Fall. Für das Vektorpotential gilt dann

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\vec{\jmath}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \,, \tag{20.2}$$

und das magnetische Induktionsfeld ergibt sich aus $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$,

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \, \nabla_r \times \frac{\vec{\jmath}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \, \vec{\jmath}(\vec{r}') \times \nabla_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^3 r' \, \vec{\jmath}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \,, \end{aligned} \tag{20.3}$$

wobei die Beziehungen $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ und $\nabla_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$ ausgenutzt wurden.

21. Wie kann man aus gegebenem ϱ und $\vec{\jmath}$ die $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder berechnen?

Aus der Ladungsverteilung ϱ und der Stromdichte $\vec{\jmath}$ lassen sich die retardierten Potentiale (19.6) berechnen, und aus diesen erhält man über Gleichung (14.2) die $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder.

22. Wie lautet die Ladungs- und Stromdichte einer Punktladung?

Die Ladungsdichte einer Punktladung q am Ort $\vec{r}_1$ lautet

$$\varrho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \,. \tag{22.1}$$

Wenn sich die Ladung mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}_1/\mathrm{d}t$ bewegt, ist die Stromdichte

$$\vec{\jmath}(\vec{r}, t) = \varrho \vec{v} = q \vec{v} \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \,. \tag{22.2}$$

Zu einer Punktladung gehört somit die Viererstromdichte

$$j^\alpha(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \,. \tag{22.3}$$

23. Was sind die Liénard-Wiechert-Potentiale? Wie kommt man darauf?

Die Liénard-Wiechert-Potentiale sind die retardierten Potentiale einer entlang der Trajektorie $\vec{r}_1(t)$ beliebig bewegten Punktladung q,

$$A^\alpha_{\text{ret}}(\vec{r},t) = \frac{q}{R\left(1-\vec{\beta}\,\vec{e}_R\right)}\begin{pmatrix}1\\ \vec{\beta}\end{pmatrix}\Bigg|_{t_{\text{ret}}}, \tag{23.1}$$

mit $R(t) = |\vec{R}(t)| = |\vec{r}-\vec{r}_1(t)|$, $\vec{\beta} = \dot{\vec{r}}_1/c$, $\vec{e}_R = \vec{R}/R$ und der retardierten Zeit $t_{\text{ret}} = t - \frac{1}{c}R(t_{\text{ret}})$.

Zur Herleitung der Liénard-Wiechert-Potentiale geht man von den retardierten Potentialen

$$A^\alpha_{\text{ret}}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3r'\, \frac{j^\alpha(\vec{r}\,',t')\cdot\delta(t'-t_{\text{ret}})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{23.2}$$

aus, setzt die Viererstromdichte einer Punktladung am Ort $\vec{r}_1(t')$ ein, also $j^\alpha = q\delta(\vec{r}-\vec{r}_1)\left(\begin{smallmatrix}c\\ \vec{v}\end{smallmatrix}\right)$, und führt die räumliche Integration durch:

$$\begin{aligned}
A^\alpha_{\text{ret}}(\vec{r},t) &= \frac{q}{c}\int \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3r'\, \frac{\delta\Big(\vec{r}\,'-\vec{r}_1(t')\Big)\cdot\delta\Big(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\Big)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\begin{pmatrix}c\\ \vec{v}\end{pmatrix}\\
&= q\int \mathrm{d}t'\, \frac{\delta\Big(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}_1(t')|}{c}\Big)}{|\vec{r}-\vec{r}_1(t')|}\begin{pmatrix}1\\ \vec{\beta}\end{pmatrix}\\
&= q\int \mathrm{d}t'\, \frac{\delta\Big(t'-t+\frac{R(t')}{c}\Big)}{R(t')}\begin{pmatrix}1\\ \vec{\beta}\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{23.3}$$

Da in der Deltafunktion eine Funktion der Zeitvariablen t' vorkommt, muss man die Regel

$$\delta\Big(f(t')\Big) = \sum_n \frac{\delta(t'-t_n)}{\left|\left(\frac{\mathrm{d}f(t')}{\mathrm{d}t'}\right)_{t'=t_n}\right|} \tag{23.4}$$

anwenden, wobei t_n die Nullstellen von $f(t')$ sind. In unserem Falle gilt

$$\begin{aligned}
f(t') &= t'-t+\frac{R(t')}{c} = t'-t+\frac{1}{c}\left[\sum_i \Big(R_i(t')\Big)^2\right]^{1/2}\\
\curvearrowright\qquad \frac{\mathrm{d}f(t')}{\mathrm{d}t'} &= 1-\frac{1}{c}\,\frac{\vec{R}(t')\cdot\dot{\vec{r}}_1(t')}{R(t')} = 1-\vec{\beta}(t')\cdot\vec{e}_R(t'),
\end{aligned} \tag{23.5}$$

und die Nullstelle liegt bei $t' = t_{\text{ret}}$. Das ergibt

$$\begin{aligned}
A^\alpha_{\text{ret}}(\vec{r},t) &= q\int \mathrm{d}t'\, \frac{\delta(t'-t_{\text{ret}})}{R(t')\cdot\Big|1-\vec{\beta}(t_{\text{ret}})\cdot\vec{e}_R(t_{\text{ret}})\Big|}\begin{pmatrix}1\\ \vec{\beta}\end{pmatrix}\\
&= \frac{q}{R(t_{\text{ret}})\cdot\Big|1-\vec{\beta}(t_{\text{ret}})\cdot\vec{e}_R(t_{\text{ret}})\Big|}\begin{pmatrix}1\\ \vec{\beta}\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{23.6}$$

24. Wie lautet die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes?

$$\mathcal{E}_{\text{em}} = \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi}\,. \tag{24.1}$$

25. Welche physikalische Bedeutung hat der Poyntingvektor?

Der Poyntingvektor

$$\vec{S} = \tfrac{c}{4\pi}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) \tag{25.1}$$

ist die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes.

26. Welche Kontinuitätsgleichung erfüllt der Poyntingvektor?

Der Poyntingvektor steht mit der totalen Energiedichte $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{em}} + \mathcal{E}_{\text{mech}}$ in folgendem Zusammenhang:

$$\partial_t \mathcal{E} + \operatorname{div} \vec{S} = 0\,, \tag{26.1}$$

wobei $\mathcal{E}_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)$ die elektromagnetische Energiedichte und $\partial_t \mathcal{E}_{\text{mech}} = \vec{\jmath}\,\vec{E}$ die zeitliche Änderung der mechanischen Energiedichte ist.

27. Wie lautet der Energie- und Impulssatz der Elektrodynamik?

Die Erhaltungssätze für Energie und Impuls lassen sich in einer kovarianten Form durch die Gleichung

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{c}\, F^{\beta\nu} j_\nu \tag{27.1}$$

ausdrücken. $T^{\alpha\beta}$ ist der Energie-Impuls-Tensor,

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{\text{em}} & \frac{1}{c}\,\vec{S}^{\text{T}} \\ \frac{1}{c}\,\vec{S} & -T_{ij} \end{pmatrix} \tag{27.2}$$

mit der elektromagnetischen Energiedichte $\mathcal{E}_{\text{em}}$, dem Poyntingvektor $\vec{S}$ und dem Maxwell'schen Spannungstensor T_{ij}:

$$\mathcal{E}_{\text{em}} = \tfrac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right), \tag{27.3}$$

$$\vec{S} = \tfrac{c}{4\pi}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right), \tag{27.4}$$

$$T_{ij} = \tfrac{1}{4\pi}\left[E_i E_j + B_i B_j - \tfrac{1}{2}\,\delta_{ij}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)\right]. \tag{27.5}$$

In Komponentenschreibweise lautet der Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{4\pi}\left(\eta_{\mu\nu}F^{\alpha\mu}F^{\beta\nu} - \tfrac{1}{4}\,\eta^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) \tag{27.6}$$

mit der Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. Dies kann man aus Gleichung (27.1) wie folgt herleiten: Auf der rechten Seite ersetzt man j_ν durch die inhomogene Maxwellgleichung $\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}\,j_\nu$,

$$-\tfrac{1}{c}\,F^{\beta\nu}j_\nu = -\tfrac{1}{4\pi}\,F^{\beta\nu}\partial^\mu F_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{4\pi}\left[\partial^\mu\Big(F^{\beta\nu}F_{\mu\nu}\Big) - \Big(\partial^\mu F^{\beta\nu}\Big)F_{\mu\nu}\right]. \tag{27.7}$$

Den ganz rechten Term kann man unter Ausnutzung der Antisymmetrie des Feldstärketensors umschreiben als

$$\begin{aligned}
\Big(\partial^\mu F^{\beta\nu}\Big)F_{\mu\nu} &= \tfrac{1}{2}\Big(\partial^\mu F^{\beta\nu}\Big)F_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\Big(\partial^\mu F^{\beta\nu}\Big)F_{\mu\nu}\\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\partial^\mu F^{\beta\nu}\Big)F_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\Big(\partial^\mu F^{\nu\beta}\Big)F_{\nu\mu}\\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\partial^\mu F^{\beta\nu}\Big)F_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\Big(\partial^\nu F^{\mu\beta}\Big)F_{\mu\nu}\\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\partial^\mu F^{\beta\nu} + \partial^\nu F^{\mu\beta}\Big)F_{\mu\nu}\\
&= -\tfrac{1}{2}\Big(\partial^\beta F^{\nu\mu}\Big)F_{\mu\nu}\\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\partial^\beta F^{\mu\nu}\Big)F_{\mu\nu}\,,
\end{aligned} \tag{27.8}$$

wobei im vorletzten Schritt von der homogenen Maxwellgleichung Gebrauch gemacht wurde, $\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\Big(\partial^\beta F^{\mu\nu}\Big)F_{\mu\nu} &= \partial^\beta\Big(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Big) - F^{\mu\nu}\Big(\partial^\beta F_{\mu\nu}\Big)\\
&= \partial^\beta\Big(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Big) - \eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda}F_{\kappa\lambda}\Big(\partial^\beta F_{\mu\nu}\Big)\\
&= \partial^\beta\Big(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Big) - F_{\kappa\lambda}\Big(\partial^\beta F^{\kappa\lambda}\Big)\\
&= \partial^\beta\Big(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Big) - \Big(\partial^\beta F^{\mu\nu}\Big)F_{\mu\nu}\\
\curvearrowright\quad \Big(\partial^\beta F^{\mu\nu}\Big)F_{\mu\nu} &= \tfrac{1}{2}\,\partial^\beta\Big(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Big)\,.
\end{aligned} \tag{27.9}$$

In (27.7) eingesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{c}\,F^{\beta\nu}j_\nu &= -\tfrac{1}{4\pi}\left[\partial^\mu\Big(F^{\beta\nu}F_{\mu\nu}\Big) - \tfrac{1}{4}\,\partial^\beta\Big(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Big)\right]\\
&= -\tfrac{1}{4\pi}\,\partial_\alpha\Big(\eta^{\alpha\mu}F_{\mu\nu}F^{\beta\nu} - \tfrac{1}{4}\,\eta^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Big)\\
&= -\tfrac{1}{4\pi}\,\partial_\alpha\Big(F^{\alpha}{}_{\nu}F^{\beta\nu} - \tfrac{1}{4}\,\eta^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Big)\\
&= -\tfrac{1}{4\pi}\,\partial_\alpha\Big(\eta_{\mu\nu}F^{\alpha\mu}F^{\beta\nu} - \tfrac{1}{4}\,\eta^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Big)\\
&= \partial_\alpha T^{\alpha\beta}\,.
\end{aligned} \tag{27.10}$$

Und schließlich kann man (27.6) ablesen, $T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi}\left(\eta_{\mu\nu}F^{\alpha\mu}F^{\beta\nu} - \frac{1}{4}\,\eta^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)$.

28. Wie kann man die Maxwellgleichungen aus einer Lagrangedichte herleiten?

Eine Lagrangedichte, die zu den inhomogenen Maxwellgleichungen führt, lautet

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{16\pi}\,F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{c}\,j^\alpha A_\alpha\,. \tag{28.1}$$

Hierbei ist über α und β zu summieren. Führt man die Summe explizit aus, erhält man $\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \varrho\phi + \frac{1}{c}\vec{\jmath}\vec{A}$.

Die Lagrange-Bewegungsgleichungen folgen aus dem Hamilton-Prinzip der extremalen Wirkung[5] bei Variation nach A_ν:

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0\,. \tag{28.2}$$

Dies ist die Verallgemeinerung der Lagrangegleichungen auf Felder, die im Gegensatz zu den Lagrangegleichungen diskreter Systeme neben der Zeitableitung von $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{A}_\nu$ auch räumliche Ableitungen von $\partial\mathcal{L}/\partial A'_\nu$ enthalten. Schreibt man die A_α-Abhängigkeit der Lagrangedichte explizit aus,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\tfrac{1}{16\pi}\,\eta^{\alpha\kappa}\eta^{\beta\lambda}F_{\kappa\lambda}F_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{c}\,j^\alpha A_\alpha \\ &= -\tfrac{1}{16\pi}\,\eta^{\alpha\kappa}\eta^{\beta\lambda}\Big(\partial_\kappa A_\lambda - \partial_\lambda A_\kappa\Big)\Big(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\Big) - \tfrac{1}{c}\,j^\alpha A_\alpha\,,\end{aligned} \tag{28.3}$$

und berechnet die Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\tfrac{1}{16\pi}\,\eta^{\alpha\kappa}\eta^{\beta\lambda}\Big[\Big(\delta^\mu_\kappa\delta^\nu_\lambda - \delta^\mu_\lambda\delta^\nu_\kappa\Big)F_{\alpha\beta} + F_{\kappa\lambda}\Big(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha\Big)\Big] \\ &= -\tfrac{1}{16\pi}\,\Big(\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}F_{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\nu}\eta^{\beta\mu}F_{\alpha\beta} + \eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda}F_{\kappa\lambda} - \eta^{\nu\kappa}\eta^{\mu\lambda}F_{\kappa\lambda}\Big) \\ &= -\tfrac{1}{16\pi}\,(F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu} + F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) = -\tfrac{1}{4\pi}\,F^{\mu\nu}\,, \end{aligned} \tag{28.4}$$

$$\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\tfrac{1}{4\pi}\,\partial_\mu F^{\mu\nu}\,, \tag{28.5}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\tfrac{1}{c}\,j^\nu\,, \tag{28.6}$$

so folgen die inhomogenen Maxwellgleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \tfrac{4\pi}{c}\,j^\nu\,. \tag{28.7}$$

Die homogenen Maxwellgleichungen wurden dabei bereits implizit durch den Ausdruck $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ vorausgesetzt.

29. Ist die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes eichinvariant?

Im Allgemeinen nicht. In der Lagrangedichte $\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}\,F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - \frac{1}{c}\,j^\alpha A_\alpha$ ist nur der $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$-Term eichinvariant; $j^\alpha A_\alpha$ wird bei einer Eichtransformation $A_\alpha \to A_\alpha - \partial_\alpha\chi$ zu $j^\alpha A_\alpha - j^\alpha\partial_\alpha\chi$. Also transformiert sich die Lagrangedichte gemäß

$$\mathcal{L} \;\to\; \mathcal{L} + \tfrac{1}{c}\,j^\alpha\partial_\alpha\chi\,. \tag{29.1}$$

[5] Die Wirkung ist definiert als $S = \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu)$.

Der zusätzliche Term $j^\alpha \partial_\alpha \chi$ ändert aber nichts an den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen, denn er kann aufgrund der Kontinuitätsgleichung ($\partial_\alpha j^\alpha = 0$) als eine totale 4er-Divergenz $\partial_\alpha(j^\alpha \chi)$ geschrieben werden, und diese wird im Wirkungsintegral $S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu)$ durch partielle Integration zu einem Oberflächenterm, welcher bei Variation der Wirkung nach A_ν verschwindet, denn die Variation an den Rändern ist Null.

30. Wie lautet die Poissongleichung? Welche Lösung hat sie?

Die Poissongleichung lautet

$$\Delta\phi(\vec{r}\,) = -4\pi\varrho(\vec{r}\,) \tag{30.1}$$

mit dem Laplaceoperator $\Delta = \nabla^2$.

Falls $\varrho(\vec{r}\,)$ für alle $\vec{r}$ bekannt ist und keine Randbedingungen für $\phi(\vec{r}\,)$ im Endlichen vorliegen, lautet die Lösung

$$\phi(\vec{r}\,) = \int \mathrm{d}^3r'\, \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,. \tag{30.2}$$

31. Was ist eine Green-Funkton?

Als Green-Funktion bezeichnet man eine Distribution $G_\mathcal{D}(x, x')$, welche die Differentialgleichung

$$\mathcal{D}\, G_\mathcal{D}(x, x') = \delta(x - x') \tag{31.1}$$

erfüllt, wobei $\mathcal{D}$ ein linearer Differentialoperator ist, der auf x wirkt. Mit Hilfe der Green-Funktion lässt sich die Differentialgleichung

$$\mathcal{D} f(x) = g(x) \tag{31.2}$$

formal durch

$$f(x) = \int \mathrm{d}x'\, G_\mathcal{D}(x, x') \cdot g(x') \tag{31.3}$$

lösen, denn es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{D} f(x) &= \mathcal{D} \int \mathrm{d}x'\, G_\mathcal{D}(x, x') \cdot g(x') = \int \mathrm{d}x'\, \mathcal{D}\, G_\mathcal{D}(x, x') \cdot g(x') \\ &= \int \mathrm{d}x'\, \delta(x - x') \cdot g(x') = g(x)\,. \end{aligned} \tag{31.4}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass $\mathcal{D}$ zwar auf x wirkt aber nicht auf x' und daher an $\mathrm{d}x'$ und $g(x')$ vorbeigezogen werden kann.

Beispielsweise lautet die Green-Funktion zum Laplaceoperator $\Delta = \nabla^2$

$$G_\Delta(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi}\, \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,. \tag{31.5}$$

Damit lautet die Lösung der Poissongleichung, $\Delta\phi(\vec{r}\,) = -4\pi\varrho(\vec{r}\,)$:

$$\phi(\vec{r}\,) = -4\pi\int \mathrm{d}^3r'\, G(\vec{r},\vec{r}\,') \cdot \varrho(\vec{r}\,') = \int \mathrm{d}^3r' \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,. \tag{31.6}$$

32. Was ist eine Multipolentwicklung?

Statische Ladungs- und Stromdichten ($\partial_t\varrho = \partial_t\vec{\jmath} = 0$) haben statische $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder zur Folge, die durch statische Potentiale ϕ und $\vec{A}$ ausgedrückt werden können:

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = -\mathrm{grad}\,\phi(\vec{r}\,)\,, \qquad \vec{B}(\vec{r}\,) = \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}\,)\,. \tag{32.1}$$

Im statischen Fall sind Coulomb- und Lorenz-Eichung identisch, $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$, und führen auf die Poissongleichung für die Potentiale:

$$\Delta\phi = -4\pi\varrho \quad \curvearrowright \quad \phi(\vec{r}\,) = \int \mathrm{d}^3r' \frac{\varrho\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,, \tag{32.2}$$

$$\Delta\vec{A} = -\tfrac{4\pi}{c}\vec{\jmath} \quad \curvearrowright \quad \vec{A}(\vec{r}\,) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\vec{\jmath}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,. \tag{32.3}$$

Im Falle räumlich begrenzter statischer Ladungs- und Stromdichteverteilungen können die Potentiale in großer Entfernung approximativ durch eine Taylor-Entwicklung ausgedrückt werden. Für das Skalarpotential lautet sie

$$\phi(\vec{r}\,) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{r}\,\vec{p}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} Q_{ij}\frac{r_i r_j}{r^5} + \cdots\,, \tag{32.4}$$

mit der Gesamtladung (Monopol) q, dem elektrischem Dipolmoment $\vec{p}$, dem elektrischem Quadrupolmoment Q_{ij} etc. (nächster Term: Oktupolmoment):

$$q = \int \mathrm{d}^3r'\,\varrho(\vec{r}\,')\,, \tag{32.5}$$

$$\vec{p} = \int \mathrm{d}^3r'\,\vec{r}\,'\varrho(\vec{r}\,')\,, \tag{32.6}$$

$$Q_{ij} = \int \mathrm{d}^3r'\,\varrho(\vec{r}\,')\cdot(3r_i'r_j' - r'^2\delta_{ij})\,. \tag{32.7}$$

Eine solche Entwicklung nennt man Multipolentwicklung. Es gibt die Fälle:

- $q \neq 0 \quad \curvearrowright$ Monopol dominiert, d.h. eine statische Ladungsverteilung sieht aus der Ferne wie ein elektrischer Monopol aus.
- $q = 0 \quad \curvearrowright$ Dipol dominiert.
- Spiegelsymmetrie $\varrho\,(\vec{r}\,) = \varrho\,(-\vec{r}\,) \quad \curvearrowright \quad \vec{p} = 0$.
- $q = 0$, $\vec{p} = 0 \quad \curvearrowright$ Quadrupol dominiert.
- Rotationssymmetrie $\varrho\,(\vec{r}\,) = \varrho\,(r) \quad \curvearrowright \quad Q_{ij} = 0$.

33. Wie sieht das Feld eines elektrischen Dipols aus?

Das Potential eines Dipols lautet (in der Fernzone)

$$\phi(\vec{r}\,) = \frac{\vec{r}\,\vec{p}}{r^3}\,. \tag{33.1}$$

Daraus lässt sich das elektrische Feld wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\mathrm{grad}\,\phi = -\sum_i \vec{e}_i\,\partial_i\left[\sum_j r_j p_j\Big(\sum_k r_k^2\Big)^{-3/2}\right] \\
&= -\sum_i \vec{e}_i\left[p_i\Big(\sum_k r_k^2\Big)^{-3/2} - \sum_j r_j p_j\cdot\tfrac{3}{2}\Big(\sum_k r_k^2\Big)^{-5/2} 2\,r_i\right] \\
&= -\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{r}\,\vec{p}\,)\,\vec{r}}{r^5} \\
&= \frac{3(\vec{r}\,\vec{p}\,)\,\vec{r} - \vec{p}\,r^2}{r^5}\,.
\end{aligned} \tag{33.2}$$

34. Was passiert mit einer beschleunigten Ladung?

Sie strahlt Energie in Form elektromagnetischer Wellen ab.

Zur Herleitung geht man von den retardierten Potentialen einer entlang der Trajektorie $\vec{r}_1(t)$ beliebig bewegten Punktladung aus, also von den Liénard-Wiechert-Potentialen (23.1), und berechnet daraus die $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder. Mit $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_1$ und $\vec{e}_R = \vec{R}/R$ ergeben sich Ausdrücke der Form[6]

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_v + \vec{E}_a\,, \\
\vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{e}_R \times \vec{E}\,,
\end{aligned} \tag{34.2}$$

$\vec{E}_v$ ist nur von der Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}_1$ der Ladung – nicht von ihrer Beschleunigung – abhängig und fällt für große Abstände von der Ladung mit $1/R^2$ ab. $\vec{E}_a$ ist proportional zur Beschleunigung $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}_1$ der Ladung und fällt wie $1/R$ ab. Aus den Feldern kann nun die Energiestromdichte, d.h. der Poyntingvektor $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$ berechnet werden und daraus der Energiefluss durch eine Kugeloberfläche $\oint \mathrm{d}\vec{f}\,\vec{S} = \int \mathrm{d}\Omega\,R^2\vec{S}$. Für $R \to \infty$ geht dieses Integral für alle Beiträge von $\vec{S}$, die wie $1/R^4$ oder $1/R^3$ abfallen, gegen Null und es kann dann keine Energie nach Unendlich entweichen. Zur Energieabstrahlung trägt also nur der Term $\vec{E}_a \times \vec{B}_a \propto 1/R^2$ bei. Daraus folgt, dass nur beschleunigte Ladungen Energie durch Strahlungsemission velieren.

[6] Die vollständigen Ausdrücke lauten

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}, t) &= q\,\frac{\big(\vec{e}_R - \vec{\beta}\,\big)\big(1-\beta^2\big)}{\big(1-\vec{\beta}\vec{e}_R\big)^3}\,\frac{1}{R^2}\bigg|_{t_\mathrm{ret}} + \frac{q}{c}\,\frac{\vec{e}_R\times\big[\big(\vec{e}_R-\vec{\beta}\,\big)\times\dot{\vec{\beta}}\,\big]}{\big(1-\vec{\beta}\vec{e}_R\big)^3}\,\frac{1}{R}\bigg|_{t_\mathrm{ret}}\,, \\
\vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{e}_R\times\vec{E}\,\Big|_{t_\mathrm{ret}}\,.
\end{aligned} \tag{34.1}$$

35. Wie kommt man zu elektromagnetischen Wellen?

Man geht von den Vakuum-Maxwellgleichungen bei Abwesenheit von elektrischen Ladungen und Strömen aus,

$$\nabla\vec{B} = 0\,, \tag{35.1}$$
$$\nabla\vec{E} = 0\,, \tag{35.2}$$
$$\nabla\times\vec{B} = \tfrac{1}{c}\,\partial_t\vec{E}\,, \tag{35.3}$$
$$\nabla\times\vec{E} = -\tfrac{1}{c}\,\partial_t\vec{B}\,, \tag{35.4}$$

bildet die Rotation von (35.3), wobei die Beziehung $\nabla\times\big(\nabla\times\vec{A}\big) = \nabla\big(\nabla\vec{A}\big) - \nabla^2\vec{A}$ anzuwenden ist, und setzt (35.1) und (35.4) ein:

$$\nabla\times\Big(\nabla\times\vec{B}\Big) = \nabla\times\Big(\tfrac{1}{c}\,\partial_t\vec{E}\Big) \quad\curvearrowright\quad \nabla\Big(\underbrace{\nabla\vec{B}}_{(35.1)}\Big) - \nabla^2\vec{B} = \tfrac{1}{c}\,\partial_t\Big(\underbrace{\nabla\times\vec{E}}_{(35.4)}\Big)$$

$$\curvearrowright\quad \Big(\frac{1}{c^2}\,\partial_t^2 - \nabla^2\Big)\vec{B} = 0\,. \tag{35.5}$$

Für (35.4) erhält man analog:

$$\nabla\times\Big(\nabla\times\vec{E}\Big) = \nabla\times\Big(-\tfrac{1}{c}\,\partial_t\vec{B}\Big) \quad\curvearrowright\quad \nabla\Big(\underbrace{\nabla\vec{E}}_{(35.2)}\Big) - \nabla^2\vec{E} = -\tfrac{1}{c}\,\partial_t\Big(\underbrace{\nabla\times\vec{B}}_{(35.3)}\Big)$$

$$\curvearrowright\quad \Big(\frac{1}{c^2}\,\partial_t^2 - \nabla^2\Big)\vec{E} = 0\,. \tag{35.6}$$

Die homogenen Wellengleichungen (35.5) und (35.6) lassen sich mit dem Ansatz

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\,, \qquad \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \tag{35.7}$$

lösen; als physikalische Lösungen betrachtet man die jeweiligen Realteile. Durch (35.7) werden ebene monochromatische Wellen beschrieben, die sich in Richtung des Wellenvektors $\vec{k}$ ausbreiten. Einsetzen in die Wellengleichungen (35.5) und (35.6) liefert:

$$\Big(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^{\,2}\Big)\vec{B} = 0\,, \qquad \Big(-\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^{\,2}\Big)\vec{E} = 0\,. \tag{35.8}$$

Der Ansatz (35.7) löst die Wellengleichungen, wenn ω und $\vec{k}$ die so genannte Dispersionsrelation

$$\omega = ck \tag{35.9}$$

erfüllen. Innerhalb eines Mediums[7] mit Brechungsindex $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ beträgt die Phasengeschwindigkeit in (35.5) und (35.6) nicht c, sondern c/n. Die Dispersionsrelation lautet dann $\omega = \frac{c}{n}\,k$.

[7]Es handele sich um ein nichtleitendes, homogenes, isotropes Medium, sodass $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ und $\vec{B} = \mu\vec{H}$ erfüllt seien.

Statt der ebenen Wellen (35.7) kann auch der allgemeine Ansatz

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r},t) &= \int \mathrm{d}^3k\, \vec{B}_0(\vec{k}\,) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\vec{k}\vec{r}-\omega(\vec{k}\,)t]}\,,\\ \vec{E}(\vec{r},t) &= \int \mathrm{d}^3k\, \vec{E}_0(\vec{k}\,) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\vec{k}\vec{r}-\omega(\vec{k}\,)t]}\end{aligned} \tag{35.10}$$

gewählt werden, also die Superposition ebener Wellen. Wenn die Gewichtungsfunktionen $\vec{B}_0(\vec{k}\,)$ und $\vec{E}_0(\vec{k}\,)$ in einem schmalen Bereich um ein bestimmtes $\vec{k}_0$ herum konzentriert sind, werden durch (35.10) Wellenpakete beschrieben.

36. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\vec{E}$, $\vec{B}$ und $\vec{k}$?

Den Zusammenhang zwischen $\vec{E}$, $\vec{B}$ und $\vec{k}$ einer ebenen elektromagnetischen Welle erhält man, indem man (35.7) in die Maxwellgleichungen (35.1)–(35.4) einsetzt. Aus

$$\nabla\vec{B} = \sum_j \vec{e}_j \partial_j \vec{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = \mathrm{i}\sum_j \vec{e}_j k_j \vec{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = \mathrm{i}\vec{k}\vec{B} \overset{!}{=} 0\,, \tag{36.1}$$

$$\nabla\vec{E} = \mathrm{i}\vec{k}\vec{E} \overset{!}{=} 0 \tag{36.2}$$

folgt $\vec{k} \perp \vec{B}$ bzw. $\vec{k} \perp \vec{E}$. Und aus

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{B} &= \sum_{a,b,c} \varepsilon_{abc}\vec{e}_a \partial_b B_c = \sum_{a,b,c} \varepsilon_{abc}\vec{e}_a \partial_b B_{0,c} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\\ &= \mathrm{i}\sum_{a,b,c} \varepsilon_{abc}\vec{e}_a k_b B_{0,c} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\\ &= \mathrm{i}\vec{k}\times\vec{B}\\ &\overset{!}{=} \tfrac{1}{c}\,\partial_t\vec{E} = \tfrac{1}{c}\,\partial_t\vec{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = -\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\,\vec{E}\,, \end{aligned}\tag{36.3}$$

$$\nabla\times\vec{E} = \mathrm{i}\vec{k}\times\vec{E} \overset{!}{=} -\tfrac{1}{c}\,\partial_t\vec{B} = \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\,\vec{B} \tag{36.4}$$

folgt $\vec{B}\times\frac{c}{\omega}\,\vec{k} = \vec{E}$ bzw. $\frac{c}{\omega}\,\vec{k}\times\vec{E} = \vec{B}$.

Insgesamt gilt, dass $\vec{k}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ paarweise aufeinander senkrecht stehen und in dieser Reihenfolge ein rechthändiges Dreibein bilden.

37. Was bewegt sich bei einer elektromagnetischen Welle?

Bei einer ebenen Welle

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\,, \qquad \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \tag{37.1}$$

steckt die Zeitabhängigkeit in der Phase, $\vec{k}\vec{r}-\omega t$. Was sich bewegt, sind die Punkte konstanter Phase. Ihre Geschwindigkeit, die so genannte Phasengeschwindigkeit, berechnet man wie folgt:

$$\begin{aligned}\vec{k}\vec{r} - \omega t = \text{const} \quad &\curvearrowright \quad \partial_t\Big(\vec{k}\vec{r} - \omega t\Big) = \vec{k}\dot{\vec{r}} - \omega \overset{!}{=} 0\\ &\curvearrowright \quad v_{\mathrm{ph}} \equiv \dot{r} = \omega/k = c\,,\end{aligned} \tag{37.2}$$

wobei im letzten Schritt die Dispersionsrelation $\omega = ck$ eingesetzt wurde. In einem Medium mit Brechungsindex n gilt die Dispersionsrelation $\omega = \frac{c}{n}\,k$ und die Phasengeschwindigkeit ist dann $v_{\mathrm{ph}} = c/n$.

Bei einem Wellenpaket (35.10) tritt zur Phasenbewegung noch die Bewegung des Paketes hinzu, dessen Schwerpunkt sich mit der so genannten Gruppengeschwindigkeit $v_{\mathrm{gr}} \equiv \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\Big|_{k_0}$ ausbreitet. Im Vakuum ist $\omega(k) = ck \curvearrowright \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c \curvearrowright v_{\mathrm{gr}} = v_{\mathrm{ph}} = c$. In dispersiven Medien ist im Allgemeinen $v_{\mathrm{gr}} \neq v_{\mathrm{ph}}$, außerdem kommt es zu einem Zerfließen des Wellenpaketes.

38. Ist die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit in jedem Inertialsystem gleich?

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist eines der beiden Postulate, auf denen die Spezielle Relativitätstheorie beruht (das andere ist das Relativitätsprinzip). Sie ist also implizit in die Lorentztransformation eingebaut. Das kann man durch folgendes Gedankenexperiment nachrechnen:

Wir betrachten zwei Bezugssysteme S und S′, deren raumzeitliche Ursprünge zusammenfallen. S′ bewege sich mit der Geschwindigkeit v entlang der x-Achse. Zur Zeit $t = 0$ wird ein Lichtstrahl in x-Richtung ausgesendet. Dieser hat in der Zeit t_1 die Strecke x_1 zurückgelegt, bzw. – im System S′ – in der Zeit t_1' die Strecke x_1'. Im System S ergibt eine Messung der Lichtgeschwindigkeit $x_1/t_1 = c$. In S′ erhält man

$$c' = \frac{x_1'}{t_1'} = \frac{cx_1'}{ct_1'} = \frac{c\gamma(x_1 - \beta ct_1)}{\gamma(ct_1 - \beta x_1)} = c\frac{ct_1 - \beta ct_1}{ct_1 - \beta ct_1} = c\,. \tag{38.1}$$

Die Lichtgeschwindigkeit hat demnach in jedem Inertialsystem den gleichen Wert.